Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ingeniería Mecánica **P.A. 2007-2**
Área de Ciencias Básicas y Humanidades **08-01-2008**

Solucionario del Examen Sustitutorio de Cálculo Numérico (MB535)

Solo se permite el uso de una hoja de formulario

Problema 1

a) Elabore una rutina para resolver un sistema lineal **A x = b** mediante Sobre-Relajación Sucesiva (SOR), dado el factor de sobre-relajación, una tolerancia de error y un número máximo de iteraciones. Considere un vector inicial nulo.
% function [x, numite]=solveSOR(A, b, w, TOL, MAXITE)
% w : Factor de Sobre-Relajación

(1.5 p)

Solución

```
function [x, numite]=solveSOR(A, b, w, TOL, MAXITE)
D=diag(diag(A));
L=D-tril(A);
U=D-triu(A);
x=zeros(size(b));
Tw=inv(D-w*L)*((1-w)*D+w*U);
Cw=inv(D-w*L)*w*b;
for i=1:MAXITE
   xn=Tw*x+Cw;
   err=norm(xn-x,2);
   x=xn;
   if (err<TOL)
      break
   end
end
numite=i;
```

b) La función f(x) se define sobre el intervalo [0,1] como sigue:

$$f(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 1/2 \\ 1-x & 1/2\le x\le 1 \end{cases}$$

Calcular $I=\int_0^1 f(x)dx$ usando la regla de Simpson 1/3 (con h = 1/2) sobre el intervalo [0,1] y hallar el error cometido.

(1.5 p)

Solución

Por Simpson I=1/6[f(0)+4f(1/2)+f(1)]=1/3
Iexacta=1/4
Error Cometido=1/12

c) Sea la E.D.O:

$$\begin{cases} \dfrac{xy'' - 2y'}{12} = (2-x) \\ y(1) = 1, y'(2) = 0 \end{cases}$$

con h=1/4, plantear el sistema lineal usando el método de las diferencias finitas **(2.0 p)**

Solución

$D_i = \frac{12h^2}{x_i}(2 - x_i)$

$$\begin{bmatrix} -2 & \left(1 - \dfrac{1}{4x_1}\right) & 0 & 0 \\ \left(1 + \dfrac{1}{4x_2}\right) & -2 & \left(1 - \dfrac{1}{4x_2}\right) & 1 \\ 0 & \left(1 + \dfrac{1}{4x3}\right) & -2 & \left(1 - \dfrac{1}{4x_3}\right) \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 - \left(1 + \dfrac{1}{4x_1}\right) \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix}$$

Problema 2

La distribución de esfuerzos en una barra longitudinal depende de los coeficientes α y β y pueden aproximarse resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ -\beta & \alpha & -\beta \\ 0 & -\beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}$$

a) Encuentre una relación entre α y β para todos los casos de convergencia del método de Jacobi. **(1.5 p)**

b) Se sabe que el radio espectral de Gauss-Seidel $\rho(T_G)$ se puede aproximar mediante el método de la potencia, realice 03 iteraciones partiendo de $(1, 1, 1)^T$, con $\alpha = 2$ y $\beta = 1$ ¿habrá convergencia para el citado método iterativo? **(2.0 p)**

c) Para $\alpha = 4$ y $\beta = 1$ determine el ω óptimo y realice 03 iteraciones a partir de $(0, 0, 0)^T$. **(1.5 p)**

Solución

a)

$$T_J = \begin{bmatrix} 0 & -\beta/\alpha & 0 \\ -\beta/\alpha & 0 & -\beta/\alpha \\ 0 & -\beta/\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho(T_J) = \left|\frac{\sqrt{2}\beta}{\alpha}\right| < 1$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) Con $\alpha = 2$ y $\beta = 1$:

$$T_G = (D-L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/8 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = T_G * x_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.75 \\ 0.375 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 0.75 \quad x_1 = \frac{y_1}{\lambda_1} = \begin{bmatrix} 0.6667 \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$y_2 = T_G * x_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix} \quad \lambda_2 = 0.5 \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$y_3 = T_G * x_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix} \quad \lambda_3 = 0.5 \quad x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\rho(T_G) = \lambda_3 = 0.5 < 1$$

Por lo tanto habrá convergencia para el método de Gauss-Seidel.

c)

Con $\alpha = 4$ y $\beta = 1$:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$T_J = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}$$

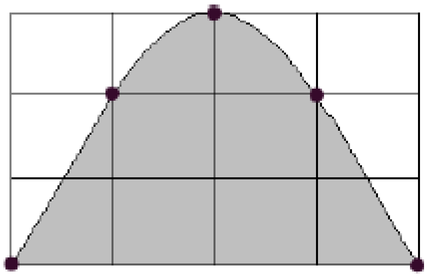
$$\rho(T_J) = 0.3536$$

$$w_{opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(T_J)^2}} = 1.0334$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_1 = \begin{bmatrix} 25.8343 \\ 32.5084 \\ 34.2326 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 33.3705 \\ 42.2142 \\ 35.5976 \end{bmatrix} \quad x_3 = \begin{bmatrix} 35.6264 \\ 42.8258 \\ 35.7101 \end{bmatrix}$$

Problema 3

El recinto de la figura adjunta, que se encuentra inmerso en una cuadrícula, está limitado por una recta y una curva de la que se conoce que se trata de un polinomio de cuarto grado.



a) Calcular el área exacta del recinto sin determinar el polinomio que la delimita sabiendo que dicha curva pasa por los puntos (−2, 0), (−1, 2), (0, 3), (1, 2) y (2, 0), para ello obtener una fórmula de cuadratura de integración por coeficientes indeterminados de la forma:

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = a_0 f(-2) + a_1 f(-1) + a_2 f(0) + a_3 f(1) + a_4 f(2)$$

(2.5 p)

b) Determinar, por el método de las diferencias divididas, el polinomio que la delimita y comprobar que el área calculada en el apartado anterior coincide con la que se obtiene por integración directa del polinomio. **(2.5 p)**

Solución

(a)

Para que la fórmula integre exactamente, se debe cumplir:

$$f(x) = 1 \implies a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \int_{-2}^{2} dx = 4$$

$$f(x) = x \implies -2a_0 - a_1 + a_3 + 2a_4 = \int_{-2}^{2} x dx = 0$$

$$f(x) = x^2 \implies 4a_0 + a_1 + a_3 + 4a_4 = \int_{-2}^{2} x^2 dx = \frac{16}{3}$$

$$f(x) = x^3 \implies -8a_0 - a_1 + a_3 + 8a_4 = \int_{-2}^{2} x^3 dx = 0$$

$$f(x) = x^4 \implies 16a_0 + a_1 + a_3 + 16a_4 = \int_{-2}^{2} x^4 dx = \frac{64}{5}$$

De donde se obtiene:

$$a_0 = \frac{14}{45}, \quad a_1 = \frac{64}{45}, \quad a_2 = \frac{24}{45}, \quad a_3 = \frac{64}{45} \quad \text{y} \quad a_4 = \frac{14}{45}$$

Es decir:

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{45}[14f(-2) + 64f(-1) + 24f(0) + 64f(1) + 14f(2)]$$

Por el que el área pedida es:

$$S = \frac{1}{45}[14 \cdot 0 + 64 \cdot 2 + 24 \cdot 3 + 64 \cdot 2 + 14 \cdot 0] = \frac{328}{45}$$

(b)
Por diferencias divididas tenemos:

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}]$
-2	0				
		$\boxed{2}$			
-1	2		$\boxed{-1/2}$		
		1		$\boxed{-1/6}$	
0	3		-1		$\boxed{1/12}$
		-1		$1/6$	
1	2		$-1/2$		
		-2			
2	0				

Por lo que el polinomio de cuarto grado que delimita el recinto es:

$$P(x) = 2(x+2) - \frac{1}{2}(x+2)(x+1) - \frac{1}{6}(x+2)(x+1)x + \frac{1}{12}(x+2)(x+1)x(x-1)$$

Es decir:

$$P(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{13}{12}x^2 + 3$$

Si calculamos el área por integración directa obtenemos

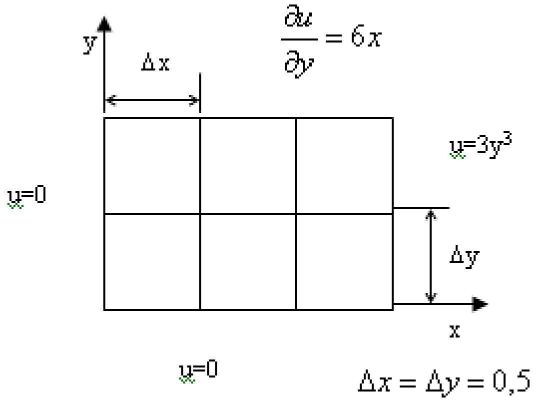
$$S = \int_{-2}^{2} P(x)dx = \left[\frac{1}{60}x^5 - \frac{13}{36}x^3 + 3x\right]_{-2}^{2} = \frac{328}{45}$$

Que es la que obtuvimos en **a)**

Problema 4

Sea *u* un flujo potencial, que obedece al siguiente modelo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12xy$$

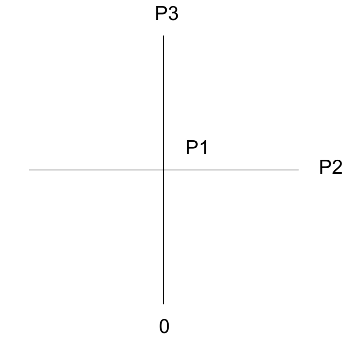


Se pide:

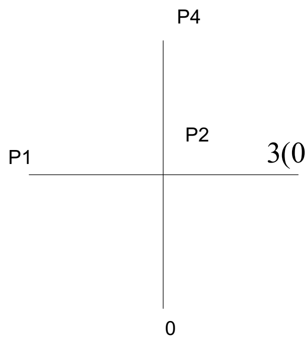
a) Plantear las ecuaciones de diferencias finitas **(4.0 p)**
b) Resolver el sistema **(1.0 p)**

Solución

a)

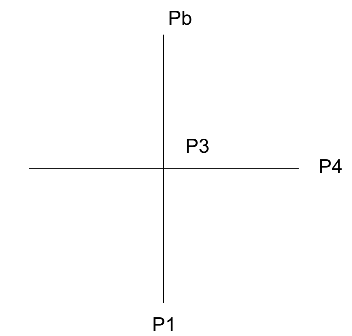


$$P3 + P2 - 4P1 = 12 * (0.5)^2 * (0.5 * 0.5)$$



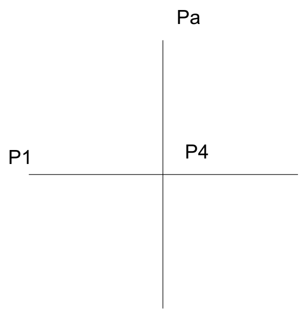
$$P4 + P1 + 0.375 - 4P2 = 12 * (0.5)^2 * (1 * 0.5)$$

$$3(0.5)^3 = 0.375$$



$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P3} = \frac{Pb - P1}{2(0.5)} = 6 * 0.5 = 3 => Pb = 3 + P1$$

$$Pb + P1 + P4 - 4P3 = 12 * (0.5)^2 * (0.5 * 1)$$
$$3 + 2P1 + P4 - 4P3 = 12 * (0.5)^2 * (0.5 * 1)$$



$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P4} = \frac{Pa - P2}{2(0.5)} = 6 * (1) ==> Pa = P2 + 6$$

$$3(1)^3 = 3$$

$$Pa + P1 + P2 + 3 - 4P3 = 12 * (0.5)^2 * (0.5 * 1)$$
$$P1 + 2P2 + 9 - 4P3 = 12 * (0.5)^2 * (0.5 * 1)$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12(0.5)^4 \\ 9(0.5)^3 \\ 12(0.5)^4 - 3 \\ 12(0.5)^3 - 9 \end{bmatrix}$$

P=[0.17205882352941, 0.27573529411765, 1.1625, 2.05588235294118]